PROBLEMAS VARIADOS

David Ramos, Antonio Medinilla, Adrián Macías y Laura García

25 de febrero de 2022

Problema 1. Sean x_i, y_i, con $i = 1, ..., n$, números reales tales que

$$x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \text{ y } y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_n$$

Probar que, si z_1,z_2,...,z_n es una permutación cualquiera de y_1,y_2,...,y_n, entonces

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

Problema 2. Sea $f(x)$ una función definida en $\mathbb{R}$, que cumple $f(1) = 1$, y además $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+5) \geq f(x) + 5 \qquad \text{y} \qquad f(x+1) \leq f(x) + 1$$

Si $g(x) = f(x) + 1 - x$, calcule $g(2022)$.

Problema 3. Sea $n = \overline{abc}$ un número de 3 cifras. Se dice que n es triangulable si podemos construir un triángulo isósceles (entendemos que un triángulo equilátero es isósceles, y descartamos los de área nula) con a, b y c como las longitudes de los lados. ¿Cuántos números triangulables hay?

Problema 4. Sean f y g funciones definidas para todos los valores reales de x e y, que satisfacen

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$$

para todos x, $y \in \mathbb{R}$. Probar que si $f(x)$ no es idénticamente nula, y $|f(x)| \leq 1$ para todo x, entonces $|g(y)| \leq 1$ para todo y.

Problema 5. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Determinar todas las funciones $f\colon\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que, para todos los enteros a y b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Problema 6. Calcula la siguiente raíz cuadrada

$$\sqrt{\frac{11^4 + 100^4 + 111^4}{2}}$$

Problema 7. ¿Puede ser la suma de 1000 números impares consecutivos la séptima potencia de algún número natural?

Problema 8. Encuentra todas las soluciones reales (x, y) del sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

Problema 9. Encuentra todas las funciones $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ tales que para todo x real no nulo se cumple:

$$\frac{1}{x}f(-x) + f(\frac{1}{x}) = x$$

Problema 10. Desde un punto arbitrario de una mesa circular de billar, se lanza una bola. Demostrar que existe un círculo en la mesa donde la bola nunca entra.

Problema 11. Encuentra un conjunto A de 10 números enteros positivos tales que no haya 6 de ellos cuya suma dé un múltiplo de 6. ¿Sería posible encontrar un conjunto B de 11 elementos con la misma propiedad?

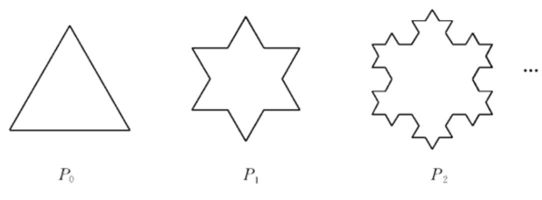
Problema 12. Sea $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ una secuencia de reales no nulos tales que $(3 - a_{n+1})(6 + a_n) = 18$ y $a_0 = 3$. Calcular

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_1}$$

Problema 13. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$. La circunferencia cuyo diámetro es el lado BC corta a los lados AB y AC en M y N respectivamente. Denotamos O como el punto medio del lado BC. Las bisectrices de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle MON$ se cortan en R. Probar que las circunferencias circunscritas en los triángulos BMR y CNR tienen un punto común en el lado BC.

Problema 14. Se eligen 6 puntos en los lados de un triángulo equilátero ABC: A_1, A_2 en BC, B_1, B_2 en CA y C_1, C_2 en AB, tal que son vértices de un hexágono convexo $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ con todos los lados de la misma longitud. Probar que los segmentos A_1B_2, B_1C_2 y C_1A_2 se cortan en un punto.

Problema 15. Como se ve en la figura, consideramos una sucesión de polígonos P_0, P_1, P_2, ... Se sabe que el área de P_0 es 1 y P_0 es un triángulo equilátero. A partir de P_n obtenemos P_{n+1} de la siguiente forma: dividimos todos los lados de P_n en 3 segmentos, y construimos un triángulo equilátero hacia afuera sobre el segmento del medio de cada lado de P_n y finalmente eliminamos dicho segmento. Definimos S_n como el área del polígono P_n.
(1) Dar una fórmula para el término general de la sucesión (S_n)
(2) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} S_n$.



Problema 16. Sean a y b enteros positivos. Demostrar que si $4ab - 1$ divide a $(4a^2 - 1)^2$, entonces $a = b$.